

**Gyarmati Judit**

**Baditz László    Hegyi Csilla**

**Krivácsy Zoltán    Rolf Rosbigalle**

# **A szabadság geometriája**

**Projektív geometria a Waldorf-iskolákban**

**„Göllner-könyvek”**

**2.**

**Emil Molt Alapítvány**

**2021**

© Emil Molt Alapítvány

A kiadvány szerzői jogvédelem alatt áll.

Bár engedély nélküli másolása kétségkívül olcsóbb lehet, mint megvásárlása, viszont további kiadványok megjelentetése elé gördít akadályokat és legtöbb esetben gyorsan papírkosárba kerül, fölöslegesen terhelve így élővilágunkat.

A megvásárolt könyvek minden forintját újabb művek kiadására fordítjuk.

Köszönjük támogatásukat!

Szakmai lektor: Baditz László

Nyelvi lektor: Kattner Kriszta

Borítóterv: Háth Nóra és Kattner Kriszta

Grafika: Kattner Kriszta

Sorozatszerkesztő: Jörg Rudolf

Felelős kiadó: Jörg Rudolf

Emil Molt Alapítvány  
1048 Budapest, Lakkozó utca 1-5.  
emil.molt.alapitvany@prwk.hu

ISBN: 978-615-01-3239-6

Nyomdai előkészítés, tördelés, kivitelezés:

Püski Attila, Digi Média Press Bt.

E-mail: puskiatilla@yahoo.com

*A „Göllner-könyvek” kiadásával Vekerdy Tamásra  
emlékezünk, aki mindvégig lelkes támogatója  
volt iskolánknak*



# Tartalomjegyzék

<b>Kiadói előszó</b> .....	10
<b>Előszó</b> .....	11
<b>Krivácsy Zoltán: A projektív geometria tanításának szellemi háttere</b> .....	13
Bemutakozás .....	14
A Waldorf-pedagógia küldetése .....	15
A „végtelen” végtelen rejtélyessége .....	17
A projektív geometria és a világ kapcsolata .....	19
A projektív geometria és az ember .....	22
A dualitás .....	24
Miért érdemes projektív geometriát tanítani? .....	25
Záró gondolatok .....	26
Felhasznált irodalom .....	26
<b>Baditz László: Projektív geometria és Bothmer-gimnasztika</b> .....	29
Bemutakozás .....	30
Mi a Bothmer-gimnasztika? .....	31
Geometria és Bothmer-gimnasztika .....	32
Projektív geometria és Bothmer-gimnasztika .....	35
<i>A végtelen természete</i> .....	35
<i>Kint és bent, pont és periféria, mozgás és ellenmozgás</i> .....	38
Felhasznált irodalom .....	42
<b>Hegyi Csilla: Ízelítő a nem-euklideszi geometriák tanításából</b> .....	43
Bemutakozás .....	44
A gömbi geometria .....	45
<i>Polaritás</i> .....	47
<i>Speciális háromszögek a gömbön</i> .....	49
<i>Területszámítás</i> .....	50

Hiperbolikus geometria .....	52
<i>Párhuzamosság a hiperbolikus síkon</i> .....	53
Projektív geometria .....	56
Felhasznált irodalom .....	61
<b>Gyarmati Judit: Lehet-e misszió a projektív geometria tanítása?</b> .....	63
Bemutakozás .....	64
Bevezető .....	65
Az én utam a projektív geometriához .....	68
<i>Irány Kassel!</i> .....	69
<i>A kasseli Waldorf iskola</i> .....	71
<i>A nemzetközi tavaszi felsős tanárképzés</i> .....	71
Hangolódás az epochára .....	74
<i>A meditáció</i> .....	75
<i>Így hangolodom tanárként</i> .....	76
<i>Rudolf Steiner: A hét napjaihoz</i> .....	78
Így hangolom a diákjaimat – ritmikus rész a projektív geometria epochán ..	80
<i>Koncentrációs gyakorlatok a ritmikus részben</i> .....	83
Az epocha első hete .....	85
<i>Az inverzió</i> .....	86
<i>Pont inverz képének megszerkesztése</i> .....	88
<i>Egyenesek inverz képe – az epocha második napja</i> .....	90
<i>A kör kifordítása másként</i> .....	97
Az epocha negyedik napja .....	103
<i>Szakasz, sokszög és kör képe</i> .....	103
Geometriai mozgás – és amit megszólít bennünk .....	106
Az epocha további napjai .....	110
Egy ötszög metamorfózisa – szerkesztés lépésről-lépésre .....	112
Házi feladat – Igen? Nem? .....	117
Diákok megélései .....	119
Felhasznált irodalom .....	121
<b>Rolf Rosbigalle: Egy út a projektív geometriához</b> .....	123
Bemutakozás .....	124
Bevezetés .....	125

Pascal és Brianchon tételének bevezetése a 10. osztályban .....	127
Projektív geometria a 11. osztályban .....	132
<i>Két háromszög viszonya</i> .....	132
<i>A dualitás elve</i> .....	139
<i>Az epocha további menete</i> .....	144
<i>Mi a képzelet, mi a gondolat? Mit is jelent a párhuzamosság?</i> .....	144
<b>Az utolsó szó jogán</b> .....	147

## Kiadói előszó

Amikor megjelentettük a Göllner-könyvek sorozat első részét 2019-ben a történelem tanítás témakörében, úgy terveztük, hogy minden évben kiadunk egy-egy újabb hiánypótló művet más-más szakterületen. Sajnos a koronavírus közbeszólt és 2020-ban el kellett napolni Gyarmati Judit tanárnőnk tervét, hogy több kollégájával összefogva, ezúttal a matematika területén jelenhessen meg egy különleges témát körbejáró mű magyarul.

A projektív geometria sajátos helyet foglal el a Waldorf-kerettantervben, semmilyen állami elvárás nem fűződik hozzá, nem jelenik meg az érettségi tételek között, ezért teljes szabadságot élveznek benne a tanárok. Ki-ki maga dönti el, milyen mélyen és merre kalandozik el a témában a diákokkal. Szükséges és fontos erről a témáról beszélni, sőt korunkban egyre sürgetőbb! Bármerre is nézünk magunk körül, akár ha az egyre intenzívebbé váló természeti katasztrófákra, akár ha a szociális területen gyülekező nehézségekre, akár ha a gép-ember jövőbeni fejlődésének kérdéseire tekintünk, mindenhol azt látjuk, hogy újfajta gondolkodásra van szükség.

Az euklidészi geometrián alapuló gondolkodásunknak hála eljutottunk a modern iparosodás korába, a technika teljesen átszövi az életünket, óriási felfedezéseket tettünk, de hogyan tovább? Hogyan lehet egy új gondolkodásmódot kialakítani?

Képzeletünk mindig a múltban megtapasztaltakból fakad, hogyan lehet mégis iskolázni magunkat, a diákokat, hogy valamit, ami a jövőből árad felénk, megsejtsünk, nyitottak legyünk valami teljesen újra?

Reméljük a projektív geometria által ebbe az irányba tudjuk segíteni a felnövekvő új generációkat, és így a témérdek probléma mellé, amit örökül hagyunk rájuk, eszközöket is adunk a kezükbe, amelyekkel a megoldás felé elindulhatnak.

Pilisszentlászló, 2021.09.29. Szent Mihály napján

Jörg Rudolf



## Előszó

2020 tavaszán, a Covid árnyékában matematika tanárok online levelezésében kisebb vita kerekedett abból, hogy kell-e nem-euklideszi geometriákat és kiemelten projektív geometriát tanítanunk a Waldorf-iskolákban vagy sem? Vissza-kerüljön-e a Waldorf-kerettantervbe – mint ahogy egykor a 2004-ben elfogadott tantervben még benne volt – vagy maradjon ki belőle továbbra is? Esetleg kerüljön bele úgy, mint egy lehetséges alternatíva?

Mi ez a téma, ami – az egyébként nagyon békés matematika csoportunkban – így fel tudta borzolni a kedélyeket? Miért nem tud ilyen vita kialakulni a másodfokú egyenlet megoldóképlete, vagy a koszinusztétel tanítása kapcsán? Miért gondoljuk, hogy a Waldorf-iskolákban, olyan tartalmakat is kell tanítani, amit szerencsére soha nem fognak az érettségin diákjainktól számon kérni, mégis elengedhetetlennek tartjuk az ezzel való foglalkozást.

2020 tavaszára végleg megérlelődött bennem, hogy az iskolámtól kapott szabad hónapjaimban szeretnék egy, a projektív geometria népszerűsítését elősegítő könyv megszületésén dolgozni. Akkor még azt gondoltam, ez az én egyéni küldetésem. Aztán minél közelebb kerültem a vágyott szabad hónapokhoz, annál inkább éreztem, hogy a két hónap és az én egyoldalú nézőpontom biztosan nem lesz elég ahhoz, hogy ebből könyv szülessen. De miért is kellene ezt a feladatot egyedül vinnem? Ezer jel mutatja, hogy éppen az összefogással lehet leginkább harcolni a mai, elszigetelő erők ellen. Már csak az volt a kérdés, talál-e olyan kollégákat, akiknek lesz idejük, erejük segíteni ezt a születést?

Most, 10 hónappal később, amikor az írásaikat olvasgatom, egyszerre vagyok nagyon lelkes és hálás. Óriási élmény látni, hogy mindannyian mások vagyunk: más a stílusunk, egyediek a meglátásaink, más-más oldalát ragadtuk meg a témának, és teljesen egyedi módon bontottuk ki azt. Krivácsy Zolit leginkább a projektív geometria szellemi háttére foglalkoztatta. E nélkül hiába megy be a tanár kész óravázlattal az osztályba, a diák érezni fogja, hogy halott dolgot öntenek rá. Hegyi Csilla kedvenc témája a gömbi geometria. Időrendben ez volt az első, amikor az ember rákényszerült, hogy gondolkodásával kilépjen az euklideszi térből. Baditz Laci a Bothmer-gimnasztikán, a tér „letapogatásán” keresztül igyekezett közelebb hozni a végtelen fogalmát.

Az én célom a konkrét tanítási tartalmak megosztása volt. Ezek jelentős részét Rolf Rosbigalle-től tanultam, akit mesteremnek tekintek ebben a témában. Az ő írásának fordítása teszi ki a munkám egyik részét. A másik része az, amit már

a saját praxisomban csiszoltam ki az évek alatt. És van egy harmadik része az írásomnak, ami nem matematika, de abban bízom, mégis segítségére lehet másoknak. A tanár belső munkája elengedhetetlen ahhoz, hogy hitelesen tudjunk diákjaink előtt állni. Ennek ellenére legtöbbször még kisebb közösségeinkben sem szoktunk a konkrétumokról beszélni. Talán szemérmesek vagyunk, azt gondoljuk, hogy ez mindenkinek a magánügye. Amikor az első mellékgyakorlat-csoportban vettem részt, akkor döböntem rá, milyen sokat segít, ha nem vagyok a kétségeimmel, gyengeségeimmel egyedül. Ezért bátorkodom itt erről is írni.

Óriási hálával tartozom Erdész Ferenc kollégámnak, aki éjszakákon át dolgozott azért, hogy az ábrákat – melyek nélkül egy geometria könyv alig értelmezhető – elkészítse. Az általa készített könyvbeli képek és további, a megértést, a gyakorlást segítő, nyomtatható ábrák az alábbi linken elérhetők, szabadon felhasználhatók. <https://tinyurl.hu/j5t9>

És végül, de nem utolsó sorban hálásan köszönöm az iskolámnak, a Göllner Mária Regionális Waldorf Gimnáziumnak a szabad hónapok intézményének megteremtését, kollégáimnak, hogy átvállalták ezekre a hónapokra az óráimat. Kiszakadhattam az iskolai feladatok tengeréből, és meg tudott születni bennem egy tér, egy „sziget”, ahova elvonulva lehetőségem nyílt átgondolni, elmélyíteni a projektív geometriával való viszonyomat. Ez után már „csak” leírni, lefordítani, lelkesíteni, összefogni kellett...

A munkám közben még jó néhány felfedezésre, megoldozásra váró terület bontakozott ki előttem. Most úgy látom, ahogyan az antropozófia egy kimeríthetetlen forrás, ugyanúgy a projektív geometria is az lett számomra.

Bízom benne, hogy a könyvet – matematika tanárokon kívül – kezükbe veszik szülők is, akik szeretnének barátságba kerülni a végtelen fogalmával, és bepillantást nyerni a Waldorf-gimnáziumok egyik fontos tanítási tartalmába.

És szeretettel ajánlom ezt a könyvet minden egykori Waldorf-diáknak, akár kapott projektív geometria epochát az iskolájától, akár nem. Őszintén remélem, hogy a könyvet forgatva, netán a szerkesztéseket elvégezve, újabb válaszokat kaphatnak, miért is jártak Waldorf-iskolába.

2021. május 23.

Gyarmati Judit